Nachhilfestunde Vektorgeometrie 313

(Abitur 1993, BW)

Die wichtigen Rechenschritte werden ausführlich erklärt.

Datei Nr. 67313

Friedrich Buckel

13. Mai 2016

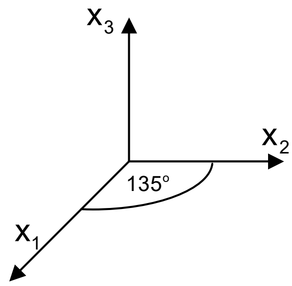
INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Aufgabe 313

Gegeben ist die Ebene E: $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24 = 0$, die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Ebene F enthält h und $P(1|3|2)$.



1 Stelle eine Koordinatengleichung von F auf.

2 E schneidet die Koordinatenachsen in S_1, S_2 und S_3.
F schneidet die Koordinatenachsen in T_1, T_2 und T_3.
Gib die Koordinaten dieser sechs Punkte an und zeichne beide Dreiecke $S_1S_2S_3$ und $T_1T_2T_3$ in ein Koordinatensystem.

Längeneinheit 1 cm, Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

3 Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

4 Die Gerade g geht durch die Punkte $Q\left(-2|1|\frac{1}{2}\right)$ und $R(-6|-1|1)$.
Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene F.

5 Der Punkt Q wird an der Ebene F gespiegelt. Berechne den Bildpunkt $\bar{Q}$.

6 Die Gerade g wird an der Ebene F gespiegelt. Gib unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse eine Gleichung der Bildgeraden $\bar{g}$ an.

7 Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F.
Zeichne s in das vorhandene Koordinatensystem ein.

8 E und F gehören zur Ebenenschar

$$E_a: \quad (10-a)x_1 + ax_2 + 3x_3 - 24 = 0 \quad , \quad a \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass alle Ebenen dieser Schar die Gerade s enthalten.

9 Für welches a steht die zugehörige Ebene E_a senkrecht auf E?

10 Gegeben sind die Pyramiden $S_1S_2S_3O$ und $T_1T_2T_3O$ mit den Eckpunkten S_1, S_2, S_3 und T_1, T_2, T_3 aus Teilaufgabe a) sowie $O(0|0|0)$.
Alle Punkte, die sowohl zur einen als auch zur anderen Pyramide gehören, bilden einen Körper K mit 5 Eckpunkten.

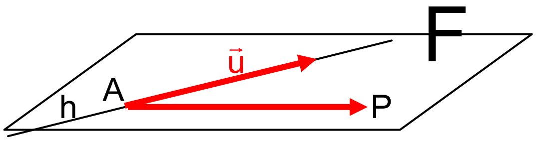
Bestimme die Koordinaten desjenigen Eckpunktes Z von K, der auf keiner der Koordinatenachsen liegt.

11 Berechne das Volumen des Körpers K.

Lösung 313

Gegeben ist die Ebene E: $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24 = 0$, die Gerade h: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$

Die Ebene F enthält h und $P(1|3|2)$.



1 Stelle eine Koordinatengleichung von F auf.

1. Methode: Man stellt eine Parametergleichung auf und wandelt sie durch Elimination der Parameter in eine Koordinatengleichung um.

2. Methode: Man berechnet direkt einen Normalenvektor von F, der auf $\vec{u}$ und $\overrightarrow{AP}$ senkrecht steht.

1a Parametergleichung von F: $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{u} + r \cdot \overrightarrow{AP}$ mit $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 3r \\ x_3 = 6 - 2t - 4r \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

Aus (2) erhält man $r = \frac{1}{3}x_2$, aus (1) folgt $t = x_1 - 1$.

Eingesetzt in (3) ergibt dies die gesuchte Koordinatengleichung:

$$x_3 = 6 - 2(x_1 - 1) - 4 \cdot \tfrac{1}{3}x_2$$

$$x_3 = 6 - 2x_1 + 2 - \tfrac{4}{3}x_2 \quad |\cdot 3$$

Ergebnis: $\mathbf{F}: \ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24$

Bemerkung: Dass diese Methode **hier** zu einer kürzeren Lösung führt, liegt nur daran, dass die Elimination von r und d extrem einfach war. Meistens führt diese Eliminationsmethode zu vielen Brüchen und langwierigeren Rechnungen. Ich empfehle die zweite oder dritte Methode mit dem Normalenvektor.

1b Berechnung des Normalenvektors mit dem Skalarprodukt

Der Normalenvektor von F sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$. Er soll zu den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ orthogonal sein, muss also zwei Bedingungen erfüllen:

1. Bed.: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow n_1 - 2n_3 = 0$

2. Bed.: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3n_2 - 4n_3 = 0$

Bei 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten ist eine frei wählbar.

Wähle also $n_3 = \lambda ; \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow n_1 = 2\lambda$ und $3n_2 = 4 \cdot \lambda \Rightarrow n_2 = \frac{4}{3}\lambda$.

Normalenvektoren sind also $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \frac{4}{3}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ Mit $\lambda = 3$: folgt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Normalengleichung (Koordinatengleichung) lautet damit: $\vec{n} \cdot \vec{x} = k \Leftrightarrow 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = k$

Punktprobe mit $A(1|0|6) \in \mathbf{F} \Rightarrow k = 6 + 18 = 24$ ergibt das

Ergebnis: $\mathbf{F}: \ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24$

1c **Berechnung des Normalenvektors mit dem Kreuzprodukt.**

Der Vektor $\vec{n} = \vec{u} \times \overrightarrow{AP}$ ist orthogonal zu $\vec{u}$ und $\overrightarrow{AP}$ und ist daher ein Normalenvektor zu F.

$$\vec{u} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}$$

Verdopplungsschema:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 3 \\ -2 & -4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ \cancel{-2} & \cancel{-4} \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-4) - (-2) \cdot 3 = 6 \\ n_2 &= \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 0 - 1 \cdot (-4) = 4 \\ n_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Damit folgt für die Koordinatengleichung: $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = k$

Die Punktprobe mit $A(1|0|6) \in \mathbf{F} \Rightarrow k = 6 + 18 = 24$ ergibt das

Ergebnis: $\mathbf{F}:\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24$

2

E schneidet die Koordinatenachsen in S_1, S_2 und S_3.
F schneidet die Koordinatenachsen in T_1, T_2 und T_3.
Gib die Koordinaten dieser sechs Punkte an.

WISSEN: Der Schnittpunkt mit der x_1-Achse hat $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$,
der Schnittpunkt mit der x_2-Achse hat $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$,
der Schnittpunkt mit der x_3-Achse hat $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$.

1. Methode: Man setzt diese Nullen in die Koordinatengleichung der Ebene ein und errechnet die jeweils fehlende 3. Koordinate.

2. Methode: Man bildet die Achsenabschnittsform. Dazu bringt man das Absolutglied nach rechts und dividiert die Gleichung durch dieses, so dass rechts nur noch die Zahl 1 steht. Dies ergibt diese Form: $\frac{x_1}{s_1} + \frac{x_2}{s_2} + \frac{x_3}{s_3} = 1$. Die Schnittpunkte mit den Achsen sind dann $S_1(s_1|0|0)$, $S_2(0|s_2|0)$, $S_3(0|0|s_3)$

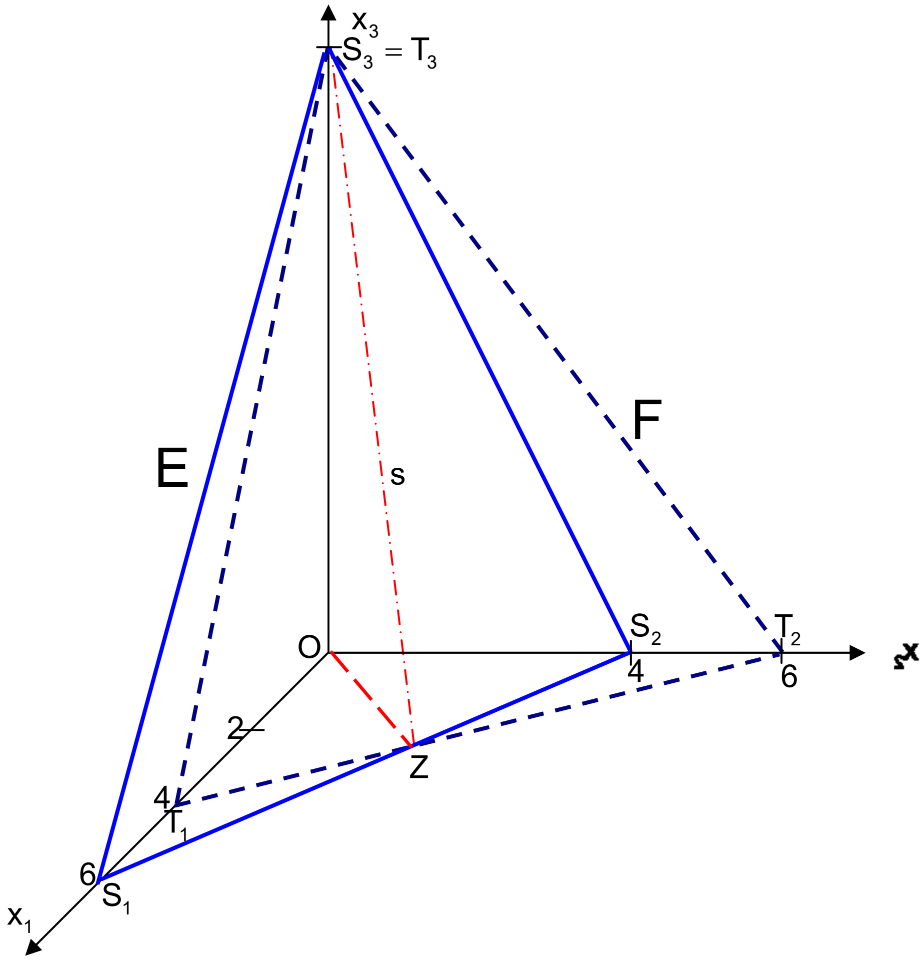
Achsenabschnittsform von E: $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 24 \quad |:24 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{8} = 1$

Schnittpunkte: $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|4|0)$, $S_3(0|0|8)$

Achsenabschnittsform von F: $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24 \quad |:24 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{8} = 1$

Schnittpunkte: $T_1(4|0|0)$, $T_2(0|6|0)$, $T_3(0|0|8) = S_3$

Zeichnung:



3 Berechne den Abstand des Punktes P von der Ebene E.

WISSEN: Den Abstand eines Punktes von einer Ebene bekommt man am schnellsten, indem man die Koordinaten des Punktes in die HNF (Hessesche Normalform) der Ebene einsetzt. Achtung: Betragsstriche nicht vergessen.

Für die **HNF** dividiert man die Koordinatengleichung (in der Form „rechts = 0") durch den Betrag des Normalenvektors dividiert.

E: $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24 = 0 \quad \Big| : |\vec{n}| = \sqrt{16+36+9} = \sqrt{61}$

HNF: $\dfrac{4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24}{\sqrt{61}} = 0$.

Mit $P(1|3|2)$ folgt $\quad d(P;E) = \dfrac{|4+18+6-24|}{\sqrt{61}} = \dfrac{4}{\sqrt{61}} \approx 0{,}51$

4 Die Gerade g geht durch die Punkte $Q\left(-2|1|\frac{1}{2}\right)$ und $R(-6|-1|1)$.
Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene F.

Es ist $\overrightarrow{QR} = \vec{r} - \vec{q} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Da bei Richtungsvektoren nur die Richtung wichtig ist, nicht4 aber die Länge (Betrag),

nehme ich als Richtungsvektor von g $\vec{w} = 2 \cdot \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gleichung von g z. B.: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Schnitt von g und F: g in F einsetzen:

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24 \quad \to \quad 6(-6-8s) + 4(-1-4s) + 3(1+s) = 24$$
$$-36 - 48s - 4 - 16s + 3 + 3s = 24$$
$$-61s = 61$$
$$s = -1$$

Eingesetzt in die Gleichung von g ergibt dies den Schnittpunkt S:

$$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-2|3|0)$$

5 Der Punkt Q wird an der Ebene F **gespiegelt**. Berechne den Bildpunkt $\bar{Q}$.

WISSEN: Bei der Spiegelung von Q an F wird zuerst das Lot von Q auf F gefällt.
Kennt man den Lotfußpunkt G, kann man mit dieser Gleichung

$$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ} + 2 \cdot \overrightarrow{QG}$$

das Spiegelbild Q' berechnen.

Es gibt jedoch zwei völlig verschiedene Arten, den Lotfußpunkt zu berechnen.

1. Art: Man schneidet die Lotgerade durch Q mit der Ebene E.

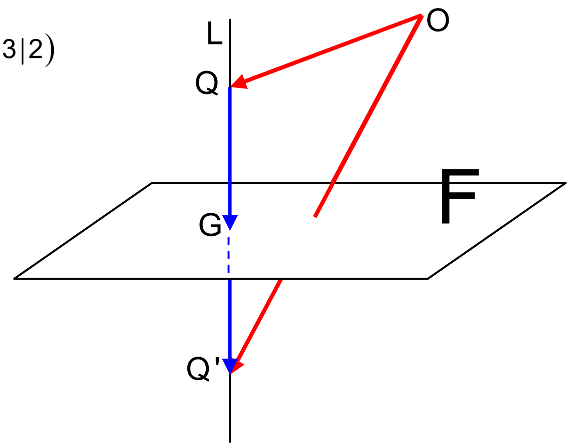
2. Art: Man berechnet den Abstand des Punktes Q von E und errechnet dann damit den Vektor $\overrightarrow{QG}$ mit dem Einheits-Normalenvektor $\vec{n}^o$

1. Lösung (Lotgerade): F: $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24$, $Q\left(-2|1|\frac{1}{2}\right)$

Man nimmt den Normalenvektor von F als Richtungsvektor des Lotes: L : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnitt von L und F ergibt den Lotfußpunkt G:

$$6(-2+6t) + 4(1+4t) + 3\left(\tfrac{1}{2} + 3t\right) = 24$$
$$-12 + 36t + 4 + 16t + \tfrac{3}{2} + 9t = 24$$
$$61t = 32 - \tfrac{3}{2} = \tfrac{64}{2} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{61}{2} \Rightarrow t = \tfrac{1}{2}$$



Eingesetzt in L: $\vec{x}_G = \vec{g} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow G(1|3|2)$

<u>Berechnung des Spiegelbildes Q' von Q:</u>

$$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ} + 2\cdot\overrightarrow{QG} = \vec{q} + 2\cdot(\vec{g} - \vec{q}) = 2\vec{g} - \vec{q}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $Q'\left(4|5|\tfrac{7}{2}\right)$

<u>2. Lösung</u> (mit dem Einheits-Normalenvektor) *(Für Fortgeschrittene)*

Gegeben: F: $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24$ mit $|\vec{n}_F| = \sqrt{61}$ sowie $Q\left(-2|1|\tfrac{1}{2}\right)$.

HNF: $\dfrac{6x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 24}{\sqrt{61}} = 0$

Abstand: $d(Q;F) = \dfrac{\left|-12 + 4 + \frac{3}{2} - 24\right|}{\sqrt{61}} = \dfrac{\left|-\frac{61}{2}\right|}{\sqrt{61}} = \dfrac{61}{2\cdot\sqrt{61}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{61}$

Wichtig: **Da bei der Abstandsberechnung Betragsstriche benötigt worden sind, liegen O und Q auf derselben Seite der Ebene F.**

Folgendes Wissen benötigt man für die weitere Lösung:

Der Normalenvektor ist $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sein Betrag ist $|\vec{n}_F| = \sqrt{61}$.

Er zeigt vom Ursprung auf die Ebene zu, und weil Q und O auf derselben Seite von F liegen, auch von Q auf die Ebene zu.

Der Einheitsnormalenvektor in der gleichen Richtung ist: $\vec{n}_F^{\,\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Multipliziert man ihn mit dem Abstand $d(Q,F) = \frac{1}{2}\sqrt{61}$, dann ist:

$$\overrightarrow{QG} = \tfrac{1}{2}\sqrt{61}\cdot\vec{n}_F^{\,\circ} = \tfrac{1}{2}\sqrt{61}\cdot\frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Nun könnte man den Lotfußpunkt G durch $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QG}$ berechnen.
Und dann anschließend das Spiegelbild durch $\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ} + 2\cdot\overrightarrow{QG}$.

Doch es geht ganz kurz ohne Berechnung von G in nur einer Zeile:

$$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ} + 2\cdot\overrightarrow{QG} = \overrightarrow{OQ} + 2\cdot d(Q;F)\cdot\vec{n}_F^{\,\circ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{61}\cdot\frac{1}{\sqrt{61}}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $Q'\left(4|5|\tfrac{7}{2}\right)$

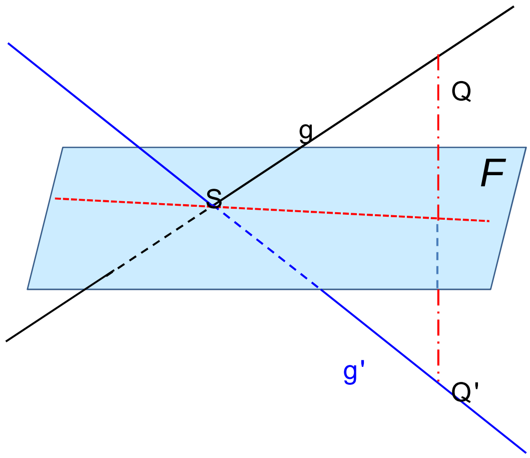
6 Die Gerade g wird an der Ebene F gespiegelt. Gib unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse eine Gleichung der Bildgeraden $\bar{g}$ an.

Der Schnittpunkt S von g und F ist ein Fixpunkt bei dieser Spiegelung: g = (QS).

Also folgt $g' = (SQ')$:

$$\overrightarrow{Q'S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(z. B.) $$g': \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$



7 Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden s von E und F. Zeichne s in das vorhandene Koordinatensystem ein.

E: $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 24$ (1)

F: $6x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24$ (2)

Für die Schnittgerade behandeln wir die beiden Ebenengleichungen als Gleichungssystem aus 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten. Wir eliminieren x_3:

(2) – (1): $2x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Wähle $x_2 = \mu; \ \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = \mu$

Eingesetzt in (1): $3x_3 = 24 - 4\mu - 6\mu = 24 - 10\mu \Rightarrow x_3 = 8 - \frac{10}{3}\mu$

Für den Ortsvektor des allgemeinen Geradenpunktes folgt somit:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ 8-\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \underbrace{-\tfrac{1}{3}\mu}_{\lambda} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis:Die Schnittgerade s von E und F hat die Gleichung

$$s: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

8

E und F gehören zur Ebenenschar

$$E_a: \quad (10-a)x_1 + ax_2 + 3x_3 - 24 = 0 \quad , \quad a \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass alle Ebenen dieser Schar die Gerade s enthalten.

Schnitt der allgemeinen Ebene E_a mit der Geraden s (durch Einsetzen):

$$(10-a)\cdot\boxed{3\lambda} + a\cdot\boxed{3\lambda} + 3\cdot\boxed{8-10\lambda} - 24 = 0$$

$$30\lambda - 3a\lambda + 3a\lambda + 24 - 10\lambda - 24 = 0$$

$$0 = 0$$

Diese Gleichung ist allgemeingültig, sie gilt also für jedes a und für jeden Wert von $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dies bedeutet, dass jeder Punkt von s in jeder der Ebenen E_a liegt.

Mit anderen Worten: **Die Gerade s ist Teil jeder der Ebenen E_a.**

9

Für welches a steht die zugehörige Ebene E_a senkrecht auf E?

Zwei Ebenen sind orthogonal, wenn ihre Normalenvektoren das Skalarprodukt 0 haben:

$$\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{Ea} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10-a \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \iff 40 - 4a + 6a + 9 = 0 \iff 2a = -49 \iff a = -24{,}5.$$

Ergebnis: Die Ebenen E und $E_{-24,5}$ stehen aufeinander senkrecht.

10

Gegeben sind die Pyramiden $S_1S_2S_3O$ und $T_1T_2T_3O$ mit den Eckpunkten S_1, S_2, S_3 und T_1, T_2, T_3 aus Teilaufgabe a) sowie $O(0|0|0)$.

Alle Punkte, die sowohl zur einen als auch zur anderen Pyramide gehören, bilden einen Körper K mit 5 Eckpunkten.

Bestimme die Koordinaten desjenigen Eckpunktes Z von K, der auf keiner der Koordinatenachsen liegt.

Der Punkt Z (Abbildung Seite 5) ist der Schnittpunkt der Geraden (T_1T_2) und (S_1S_2).

Mit $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|4|0)$; $T_1(4|0|0)$, $T_2(0|6|0)$ folgt:

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (T_1T_2): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (S_1S_2): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittgleichung:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ll} -4r + 6s = -4 & (1) \\ 6r - 4s = 4 & (2) \\ 0 = 0 & (3) \end{array} \right\}$$

$3\cdot(1) + 2\cdot(2)$: $\quad 18s - 8s = -12 + 8 \iff 10s = -4 \iff s = -\frac{2}{5}$

Eingesetzt in (S_1S_2): $\quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Z(2{,}4|2{,}4|0)$

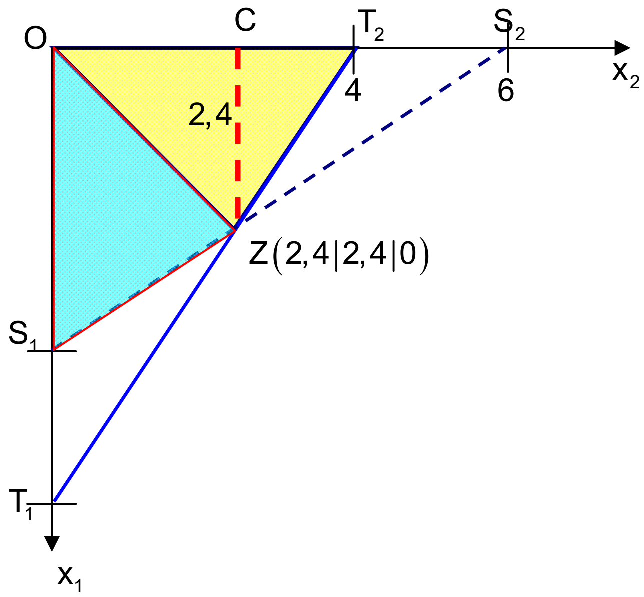
Da diese Geraden in der x_1x_2-Ebene liegen und nicht parallel sind, schneiden sie sich. Eine Probe (ob sie eventuell windschief sein könnten) entfällt daher.

11 Berechne das Volumen des Körpers K.

Der Körper K besteht aus den beiden Pyramiden OS_1ZS_3 und OT_2ZS_3

Beide haben die Höhe $H = \overline{OS_3} = 8$.

Beide Grundflächen sind gleich groß, was man erkennt, wenn man die x_1x_2-Ebene zeichnet:



Die Grundfläche OT_2Z hat diesen Inhalt:

$$A = \tfrac{1}{2} \cdot \overline{OT_2} \cdot \overline{CZ} = \tfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}4 = 4{,}8$$

Damit erhält der Köper K dieses Volumen:

$$V = 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot A \cdot H$$

$$V = \tfrac{2}{3} \cdot 4{,}8 \cdot 8 = 25{,}6$$